



超级分形雪花与埃舍尔的画作

○ 殷雅俊 杨帆

殷雅俊

清华大学航天航空学院工程力学系教授，博士生导师，主要研究方向：生物微纳米力学，生物膜力学，生物膜纳米管力学，分形生长运动学和动力学。杨帆为清华大学航天航空学院2006级力学专业硕士研究生。

超级分形雪花是我们前期构造的一个优美的分形结构，埃舍尔则是荷兰著名画家。前者属于科学，后者属于艺术，看似风马牛不相及，但细品之下，却能品评出二者之间契合呼应的韵味。

中国古语就有“雪飞六出”之说，表明古人已经掌握了雪花六分对称的特征。从几何学的角度看，六分对称的典型结构是正六边形；从拓扑学的角度看，正六边形由六个全等的正三角形无间隙地覆盖，而在有数的几个能够无间隙地镶嵌整个平面的正多边形中，正三角形结构最为简单；从力学的角度看，正三角形结构也是最为稳定的正多边形结构。既然六分对称的性质如此之优美，那么“雪飞六出”就不仅仅是大自然“喜欢的选择”，而且也是“不得已的选择”了。

古往今来，晶莹剔透的雪花，引无数文人墨客竞折腰，诞生了无数脍炙人口的诗篇和赏心悦目的画作。中学时代学习语文，课本中那首气势磅礴的《沁园春·雪》，便令人心潮澎湃，感慨不已。

美丽的雪花不仅是文学艺术家“摹写”的对象，也是非线性科学家追逐的“宠儿”。显微镜的镜头之下，雪花悄无声息地向探索者展示着自然演化的奥秘。然而，要破解雪花演化的奥秘，谈何容易！一朵朵稍纵即逝的雪花，就像一个个蒙面的古怪精灵，无论你怎样竭尽全力，也难以撩去那神秘的面纱。

也许，我们不应忽视古人的忠告：世界上绝对没有两片完全相同的雪花。的确，随机涨落

和扰动不可避免地导致了雪花的对称性破缺，也造就了每一朵雪花与众不同的个性。正因为有个性，雪花才如此千姿百态；也正因为有个性，雪花的演化才如此千变万化。个性化的雪花虽然让大自然分外妖娆，却向自然科学探索者们提出了严峻的挑战——仅仅通过研究“这一朵”或“那一朵”雪花，将很难捕捉到所有雪花共同遵循的规律性！当然，澄清“这一朵”或“那一朵”雪花是怎样变化的，无疑是重要的，但肯定不是最重要的。对以追求科学真理为己任的探索者而言，最重要的，是隐藏在每一朵变化的雪花背后，那个共同的且不变的东西！

显然，穷尽所有雪花以探索其演化规律之路没有尽头。既然如此，我们何不反其道而行之：



千变万化的雪花

追寻雪花在绝对理想化的环境下“最想”采用的生长模式？于是，就产生了超级分形雪花概念，发展出了超级分形雪花的生长运动学思想。

分形是数学家Mandelbrot于1967年提出的一个几何学概念。他在美国《科学》杂志上发表短文，问了一个“看似不成问题”的问题：“英国的海岸线有多长？”他证实，用一毫米长的尺子和十公里长的尺子测量海岸线的长度，前者的数值比后者的大得多。而当尺子的长度小到能够计量每粒沙子的尺寸时，海岸线的长度可能是无限长。换言之，海岸线的长度不是个定值，而是随尺子长短的变化而变化。这是个惊心动魄的结果。因为长度的度量，是整个自然科学中最基本的度量，而几千年来，人类对这个最基本度量的理解，竟然存在着如此深刻的局限性！海岸线虽然在经典的长度意义下不可度量，但却有一个美丽的不变性质：海湾的每一微小局部放大后，都与整体相似。这种局部与整体的相似性，称为“自相似性”。而分形结构就是这样的结构，从有限大的整体到无限小的局部，具有无穷级（或无穷嵌套）的自相似结构。分形几何中，最具代表性的分形结构之一，是蜿蜒曲折、处处连续却处处不光滑的Koch曲线。

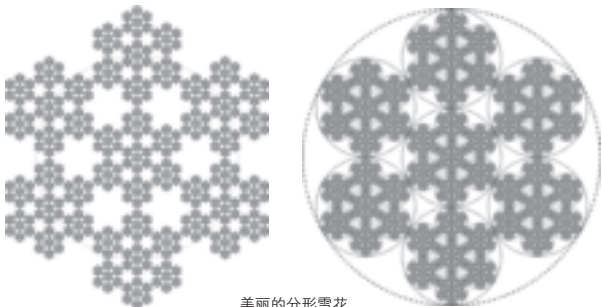
超级分形雪花并不是真实的雪花，而是分形几何学意义上的雪花。分形雪花的轮廓线，是无穷多条具有无穷嵌套自相似结构的Koch曲线；分形雪花的实体，是无穷多朵具有无穷嵌套自相似结构的Koch雪花。奇妙的是，分形雪花包络的虚空，也都是无穷多朵自相似的Koch雪花。因其完美无缺，我们说这可能是世界上最漂亮的“一朵”雪花；因其无穷无尽，我们说世界上的雪花，都没有“这一朵”雪花中的雪花多。当然，我们最终的目的，还是想借助超级分形雪花，揭示雪花生长运动学中的不变性质，并向读者传达

这样的观点：分形雪花虽然不是真实的雪花，但它可能为千姿百态的真实雪花提供一个理想化的生长“模板”。

当然，分形雪花不仅仅是科学“作品”，它与艺术多少有点关联。我们借鉴中国古典水墨画和西方水彩画的艺术思想，尝试将分形雪花染色。与西方五彩缤纷的水彩画不同，中国古典水墨画上只有两种颜色：黑色和白色。换言之，从空间形式看，水墨画上只有“墨到”的黑色空间和“墨不到”的白色空间（即留白）。正如太极八卦图上的黑白以及围棋中的黑白子，在中国古典艺术思想中，黑白两种空间形式之间，是相辅相成或互补的。墨到的部分和留白的部分，都是水墨画的有机组成部分，切掉其中任何一部分，都会“画将不画”。与水彩画重在写实不同，只有黑白两色的水墨画，重在写意。而读者在“阅读”时，必须将黑白空间有机地结合起来，通过想象和意会，才能解读出水墨画的内涵和外延。从这个意义上讲，水墨画虽然是画家创作的，但其内涵和外延，却是由画家和读者共同“创作”的。古典水墨画讲究均衡，但分形雪花却“走”向了极端——黑色的空间趋于消失，白色的空间占据了绝对优势。既然留白也是画，那么我们干脆走向另一个极端：与常规的分形染色不同，我们不再染分形空间，而是染分形空间的对偶空间——分形雪花包络的虚空（或留白）。于是五彩斑斓的彩色分形雪花便跃然纸上。

出人意料的是，彩色分形雪花与埃舍尔的作品之间有着异曲同工之妙。艺术史上，很少有画家像埃舍尔那样，在自然科学家的心目中享有如此崇高的地位。他的画，在画家眼中是线条和色彩，在自然科学家眼中则是几何、拓扑、对称性和不变性。作为艺术上的外行，很多自然科学家看不懂近代和现代派画家的作品，但看到埃舍尔的作品时却是个例外：不仅能够瞬间领悟，而且能够在瞬间共鸣。其中最能让我们共鸣的作品，大都与“极限”有关，包括《方形极限》、《越来越小》、《圆形极限》系列、《旋涡》和《蛇》。尤其是《蛇》，不仅精致、优雅、华丽，而且包含了彩色分形雪花中全部的对称性——六分对称、镜面对称、平移对称、旋转对称和相似对称。

《蛇》是埃舍尔去世前的最后一幅作品，但从中看不出暮年的老态，相反，构思之精巧，线



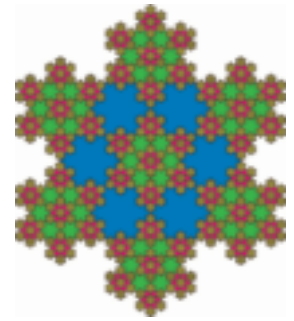
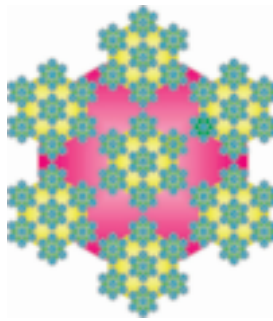
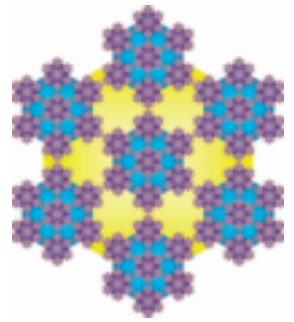
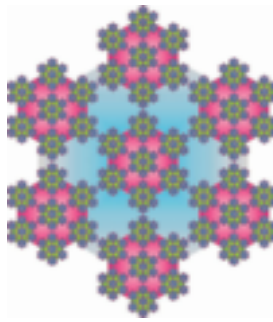
美丽的分形雪花

条之精细，色彩之艳丽，活力之蓬勃，令人叹为观止。最精细之处，竟直达视觉分辨率之极限！何等敏锐的眼睛，何等稳定的手！看这幅画，让人立即联想到古龙先生的武侠小说。古龙先生观察武功高手的手，总有独到的视角：“从来没有见过如此稳定的手。”暮年埃舍尔的手，仍然极其稳定，否则，作不出这样的画。当然，即使有稳定的手，也未必能作出这样的画，因为要操控稳定的手，还必须静到极致的心。心静如止水，手稳若泰山，应是对埃舍尔的准确写照。看这幅画，还让人联想到印度裔美籍物理学家钱德拉萨卡精彩的人生体验。钱德拉萨卡认为：科学家的创造力，总是随着年事的升高而枯竭，典型例子是牛顿和爱因斯坦，两位大师虽为科学家中的旷世奇才，但他们最具创造力的工作，都在四十多岁就已经做完；而文学家和音乐家的创造力，总是随年事的升高而递增，典型例子是莎士比亚和贝多芬，两位大师的作品，越到后期，功夫越显老到，思想越显深刻，作品越显登峰造极。现在看来，钱德拉萨卡的体验也适合作为画家的埃舍尔：年事越高，功力越深，作品越炉火纯青。虽然是外行，但我还是想说：《蛇》这幅作品，应该位列埃舍尔的巅峰杰作之一。

《蛇》与彩色分形雪花的相关性和一致性，不仅体现在对称形式上，而且体现在内涵上——二者都表达了同一个深刻的主题：无限。无限是哲学家们关注的主题，他们仰望星空，以求从宇宙无垠的深处获得心灵深处的启迪；无限也是数学家们关注的主题，两千多年的数学史，实际上就是数学家们与无限持续搏斗的历史。随着他们每一次的凯旋，人类的理性精神和心智的荣耀都同时飞跃到新的高度。《蛇》是有限和无限的统一体，埃舍尔虽然只能在有限的空间上演绎他的思想，但却在图案的中心和边缘同时趋向于无限小；彩色分形雪花更是有限和无限的统一体，在有限的空间上，分形雪花的局部和整体，都同时且协调一致地达到了无限。

人类的感性只能感知有限，人类的理性才能把握无限。不论是《蛇》还是彩色分形雪花，都只能通过有限达到无限。不论是艺术家还是科学家，都只能在有限的空间中，借助理性，创造无限，展示无限，刻画无限，探索无限，理解无限。

埃舍尔的作品不是科学，彩色分形雪花也不是艺术，但二者都从不同的侧面，体现了科学与



五彩斑斓的彩色分形雪花



埃舍尔作品：圆极限 I



埃舍尔作品：圆极限 IV



埃舍尔作品：越来越小



埃舍尔作品：蛇

艺术的内在统一。故看似风马牛不相及的两个侧面，原来却是同一个硬币的两面。而追求两面有机统一的过程，恐怕也是一个无限的过程吧？我们不大确定，但感觉答案应该是肯定的。❧